

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bằng $4\sqrt{65}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + 1 = \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} (4x^2 - 4xy + 4y^2 - 51)(x - y)^2 + 3 = 0 \\ (2x - 7)(x - y) + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x^2 + x + 1)e^x - 1}{(x + 1)(xe^x + 1)} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S ; N là trung điểm của đoạn CD . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AN theo a .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a+b)(b+c)(c+a) + \frac{72}{\sqrt{a+b+c+1}}.$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại A ; D là trung điểm của đoạn

AB . Biết rằng $I\left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}\right), E\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{3}\right)$ lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , trọng tâm tam giác ADC ; các điểm $M(3; -1), N(-3; 0)$ lần lượt thuộc các đường thẳng DC, AB . Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết A có tung độ dương.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$, điểm $A(1; 2; 0)$ và điểm $B(2; 0; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) , biết điểm C thuộc (S) và $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Câu 9.a (1,0 điểm). Giải phương trình $\log_2 x \cdot \log_3 x + 3 = \log_{\sqrt[3]{3}} x + \log_4 x^2$.

B. Theo chương trình nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ có hai tiêu điểm là F_1, F_2 .

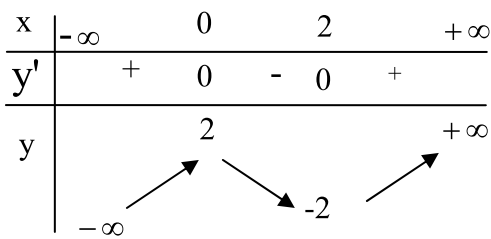
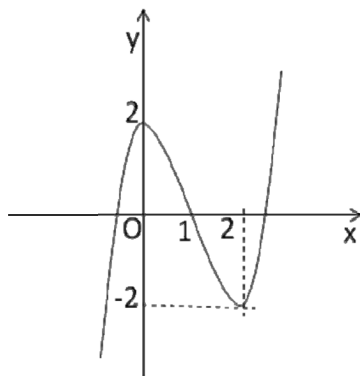
Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 bằng $\frac{4}{3}$.

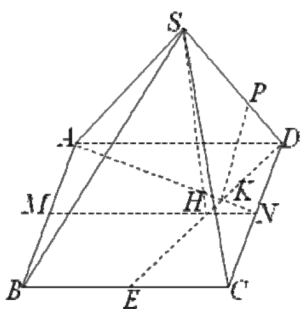
Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD = 2AB$ và diện tích bằng 27; đỉnh $A(-1; -1; 0)$; phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ các điểm B, C, D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ của điểm A .

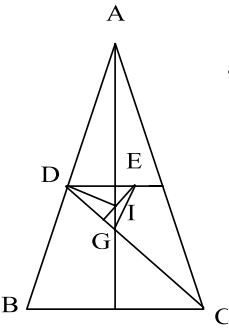
Câu 9.b (1,0 điểm). Cho số phức z thỏa mãn $\frac{(z-1)(2-i)}{z+2i} = \frac{3+i}{2}$. Tìm phần thực và phần ảo của z^9 .

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm															
1 (2,0 điểm)	a) (1,0 điểm) Với $m = 0$, ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2$ +) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. +) Sự biến thiên: - Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. - Các khoảng đồng biến $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$. - Cực trị: hàm số đạt cực đại tại $x = 0, y_{CD} = 2$; đạt cực tiểu tại $x = 2, y_{CT} = -1$. - Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$. Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr></table> 	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	$+$	0	$-$	0	y		2		$+\infty$	0,25 0,25 0,25
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$													
y'	$+$	0	$-$	0													
y		2		$+\infty$													
	+) Đồ thị: 	0,25															
	b) (1,0 điểm) Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$. Đồ thị hàm số có cực trị \Leftrightarrow phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $\Leftrightarrow 9 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 1$. Theo Định lí Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$ Do $y = y' \cdot (\frac{x}{3} - \frac{1}{3}) + 2(m - 1)x + m + 2$ nên toa độ hai điểm cực trị là: $A(x_1; 2(m - 1)x_1 + m + 2); B(x_2; 2(m - 1)x_2 + m + 2)$ $\Rightarrow AB^2 = [4(m - 1)^2 + 1](x_1 - x_2)^2 = 4[4(1 - m)^3 + (1 - m)]$ Theo giả thiết : $4[4(1 - m)^3 + (1 - m)] = 16.65 \Leftrightarrow 4(1 - m)^3 + (1 - m) - 260 = 0$. $\Leftrightarrow m = -3$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25															
2 (1,0 điểm)	Phương trình tương đương : $2\sqrt{3} \sin x \cos x - (2 \cos^2 x - 1) + 1 - (\sqrt{3} \sin x + 3 \cos x) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x (2 \cos x - 1) - (2 \cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sqrt{3} \sin x - \cos x - 2) = 0$	0,25 0,25															

	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin(x - \frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$	0,25
3 (1,0 điểm)	<p>Hệ phương trình tương đương :</p> $\begin{cases} 4x^2 - 4xy + 4y^2 + \frac{3}{(x-y)^2} = 51 \\ 2x + \frac{1}{x-y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + 3((x-y)^2 + \frac{1}{(x-y)^2}) = 51 \\ x+y+x-y+\frac{1}{x-y} = 7 \end{cases}.$	0,25
	<p>Đặt $\begin{cases} a = x+y \\ b = x-y + \frac{1}{x-y} \end{cases}$; ta có hệ $\begin{cases} a^2 + 3b^2 = 57 \\ a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3; b=4 \\ a=\frac{15}{2}; b=\frac{-1}{2} \end{cases}$.</p>	0,25
	<p>Với $a=3; b=4$ ta có: $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y+\frac{1}{x-y}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{5-\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.</p>	0,25
	<p>Với $a=\frac{15}{2}; b=\frac{-1}{2}$ thay vào có hệ phương trình vô nghiệm.</p>	0,25
4 (1,0 điểm)	$I = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)e^x}{xe^x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$	0,25
	$= \int_0^1 \left(\frac{d(xe^x+1)}{xe^x+1} - \int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} \right)$	0,25
	$= [\ln(xe^x+1) - \ln(x+1)] \Big _0^1$	0,25
	$= \ln(e+1) - \ln 2$	0,25
5 (1,0 điểm)	<p>Gọi M là trung điểm của AB, ta có</p> $\begin{cases} SM \perp AB \\ NM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMN). \text{ Kẻ } SH \perp MN \Rightarrow SH \perp (ABCD)$	0,25
	<p>Trong tam giác SMN có $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SN = \frac{a}{2}; MN = a$</p> <p>nên tam giác SMN vuông tại S $\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$</p> <p>$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$</p>	0,25
		
	<p>Gọi E là trung điểm của BC. Xét tam giác vuông SMN ta có $HM = \frac{3a}{4}; HN = \frac{a}{4}$ nên H là giao của MN và DE. Gọi K là giao điểm AN và DE.</p> <p>Kẻ $KP \perp SD \Rightarrow KP \perp AN$ nên KP là đoạn vuông góc chung của SD và AN.</p> <p>Trong tam giác SDH có</p> $KP = \frac{DK \cdot SH}{DS} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{30}}{20} \Rightarrow d(SD, AN) = \frac{a\sqrt{30}}{20}.$	0,25
		0,25

6 (1,0 điểm)	Ta có: $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - 1$	0,25
	Do $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$ $\Rightarrow ab+bc+ca \geq \sqrt{3(a+b+c)}$ Suy ra $P \geq (a+b+c)\sqrt{3(a+b+c)} + \frac{72}{\sqrt{a+b+c+1}} - 1$.	0,25
	Đặt $t = a+b+c \Rightarrow t \geq 3$. Khi đó $P \geq f(t) = t\sqrt{3t} + \frac{72}{\sqrt{t+1}} - 1$, $f'(t) = \frac{3\sqrt{3t(t+1)^3} - 72}{2\sqrt{(t+1)^3}} \geq 0$, với $t \geq 3$.	0,25
	Do đó $f(t)$ đồng biến trên $[3; +\infty) \Rightarrow f(t) \geq f(3) = 44$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 44 khi $a = b = c = 1$.	0,25
7.a (1,0 điểm)	 Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Do $ID \perp AB$ và $EG \parallel AB$ nên $ID \perp GE$, mặt khác $IG \perp DE$ nên I là trực tâm tam giác $DEG \Rightarrow EI \perp DC \Rightarrow$ phương trình $DC: x = 3$.	0,25
	Gọi $D(3; a)$. Ta có $\overrightarrow{DI} = (\frac{2}{3}; \frac{5-3a}{3})$; $\overrightarrow{DN} = (-6; -a)$. Theo giả thiết suy ra $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow -4 - a \frac{5-3a}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{4}{3} \end{cases}$	0,25
	+) Với $a = 3$ thì $D(3; 3)$ suy ra phương trình $AB: x - 2y + 3 = 0$ $\overrightarrow{DE} = (\frac{4}{3}; -\frac{4}{3})$ là véc tơ pháp tuyến của AI nên phương trình $AI: x - y - 2 = 0$ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(7; 5)$, suy ra $B(-1; 1)$, $C(3; -3)$.	0,25
	+) Với $a = -\frac{4}{3} \Rightarrow D = (3; -\frac{4}{3})$ $a = -\frac{4}{3} \Rightarrow D(3; -\frac{4}{3})$ Phương trình $AB: 2x + 9y + 6 = 0$ Phương trình $AI: 12x + 27y - 89 = 0$ Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + 9y + 6 = 0 \\ 12x + 27y - 89 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{107}{6} \\ y = -\frac{125}{27} \end{cases}$ không thỏa mãn.	0,25
8.a (1,0 điểm)	Do $A, B \in (S)$ và $AB = \sqrt{6}$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $r = \frac{AB}{2 \sin C} = \sqrt{6}$	0,25
	Phương trình mặt phẳng (P) là: $a(x-1) + b(y-2) + cz = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ Do $B \in (P) \Rightarrow a - 2b + c = 0 \Rightarrow c = 2b - a$ (1) Ta có: $d(I, (P)) = \frac{ 3c }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow 2c^2 = a^2 + b^2$ (2). Thế (1) vào (2) ta có: $a^2 - 8ab + 7b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \Rightarrow c = b \\ a = 7b \Rightarrow c = -5b \end{cases}$	0,25
	Với $a = b = c \Rightarrow$ phương trình mp(P): $x + y + z - 3 = 0$.	0,25
	Với $a = 7b, c = -5b \Rightarrow$ phương trình mp(P): $7x + y - 5z - 9 = 0$	0,25
9.a (1,0 điểm)	Điều kiện xác định: $x > 0$.	
	Phương trình tương đương: $\log_2 x \cdot \log_3 x + 3 = 3 \log_3 x + \log_2 x$ $\Leftrightarrow (\log_2 x - 3)(\log_3 x - 1) = 0$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_3 x = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
7.b (1,0 điểm)	$a = 5, b = 3 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow p = \frac{MF_1 + MF_2 + F_1F_2}{2} = 9$	0,25
	$\Rightarrow S_{MF_1F_2} = pr = 9 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} d(M, Ox) \cdot 8 \Rightarrow d(M, Ox) = 3 = y_M \Rightarrow y_M = \pm 3$	0,25
	Do đó $M(m;3)$ hoặc $M(m;-3)$.	0,25
	Vì M thuộc (E) nên $m = 0$. Vậy $M(0;3)$ và $M(0;-3)$ là hai điểm thỏa mãn bài toán.	0,25
8.b (1,0 điểm)	Đường thẳng CD qua $M(2;-1;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 2; 1)$ Gọi $H(2 + 2t; -1 + 2t; 3 + t)$ là hình chiếu của A lên CD , ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 2(3 + 2t) + 2 \cdot 2t + (3 + t) = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; -3; 2); d(A; CD) = AH = 3$.	0,25
	Từ giả thiết có: $AB + CD = 3AB = \frac{2S_{ABCD}}{AH} = 18 \Rightarrow AB = 6; DH = 3; HC = 9$.	0,25
	Đặt $\overrightarrow{AB} = t\vec{u} = (2t; 2t; t) \Rightarrow t > 0 (x_B > x_A) \Rightarrow t = \frac{AB}{ \vec{u} } = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4; 4; 2) \Rightarrow B(3; 3; 2)$.	
	$\overrightarrow{HC} = \frac{9}{6} \overrightarrow{AB} = (6; 6; 3) \Rightarrow C(6; 3; 5)$	0,25
	$\overrightarrow{HD} = -\frac{3}{6} \overrightarrow{AB} = (-2; -2; -1) \Rightarrow D(-2; -5; 1)$	0,25
9.b (1,0 điểm)	Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.	0,25
	$\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z}+2i} = \frac{3+i}{2} \Leftrightarrow (4-2i)z - (3+i)\bar{z} = 2+4i \Leftrightarrow (x+y) + (7y-3x)i = 2+4i$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 7y-3x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1 \Rightarrow z=1+i$.	0,25
	Do đó $z^9 = (\sqrt{2})^9 \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = 16 + 16i$.	0,25
	Phần thực của z là 16, phần ảo của z là 16.	0,25

.....Hết.....